

Piotr Przybyłowicz

Elementy
mechaniki analitycznej
Układy holonomiczne

Piotr Przybyłowicz

Redaktor merytoryczny: **Stanisław Janeczko**

Redakcja: **Małgorzata Zielińska**

Skład okładki: **Małgorzata Zielińska**

DTP: *Fixpoint*

© Copyright by Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej,
Warszawa 2017

Informacje o innych wydawnictwach tej serii dostępne pod adresem www.csz.pw.edu.pl

ISBN: 978-83-61993-17-9

Wydrukowano w Polsce

Spis treści

Przedmowa.....	7
1. Więzy.....	9
2. Równania Lagrange’a I rodzaju.....	20
2.1. Siły reakcji i mnożniki Lagrange’a.....	20
2.2. Determinizm w ujęciu Lagrange’a – równania I rodzaju.....	24
3. Równania Lagrange’a II rodzaju.....	32
3.1. Opis położenia punktu – współrzędna uogólniona.....	32
3.2. Przesunięcie przygotowane.....	35
3.3. Układ punktów materialnych.....	37
3.4. Równania Lagrange’a II rodzaju.....	40
3.5. Siły niepotencjalne.....	45
3.6. Bilans energii mechanicznej.....	48
3.7. Całka pierwsza równań Lagrange’a.....	53
3.8. Przykłady zastosowania równań Lagrange’a II rodzaju.....	56
4. Różniczkowe zasady mechaniki.....	69
4.1. Zasada d’Alemberta.....	69
4.2. Zasada Gaussa.....	76
5. Równania kanoniczne Hamiltona.....	81
5.1. Przestrzeń fazowa.....	81
5.2. Równania kanoniczne Hamiltona.....	82
6. Zasada Hamiltona.....	88
6.1. Przeształalność operacji d i δ	88
6.2. Zasada najmniejszego działania.....	90
A. Elementy rachunku wariacyjnego.....	95
A.1. Wstęp.....	95
A.2. Równanie Eulera–Lagrange’a.....	96
A.3. Tożsamość Beltramiego.....	101
Literatura.....	111



Przedmowa

Sto jeden lat po opublikowaniu przez Isaaca Newtona jego fundamentalnego dzieła *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Londyn, 1687) pojawiło się w Paryżu wydanie *Mécanique Analytique* Josepha Louisa Lagrange'a (1788) – książki, do której ówczesni wydawcy podchodzili z niechęcią z racji ogromu wzorów i kompletnego braku rysunków. Mimo tych marketingowych i technicznych trudności merytorycznie Lagrange'owi było nieco łatwiej. Po stu latach aparat matematyczny był już dużo bardziej zaawansowany, zwłaszcza w dziedzinie kluczowej dla dynamiki ciał materialnych, tj. rachunku różniczkowego. Spór pomiędzy twórcami tego rachunku – Newtona właśnie i Gottfrieda Leibniza – wygasł wraz z adwersarzami. Główne idee natomiast zdążył rozwinąć Johann Bernoulli (skądinąd odkrywca talentu Leonharda Eulera). Mechanika analityczna Lagrange'a uzupełniona wkładem Jeana le Rond d'Alemberta (współczesnego Eulerowi), a kolejne sto lat później rozwinięta przez Williama Rowana Hamiltona stała się alternatywnym spojrzeniem na świat Newtona oczami matematyka posługującego się niezwykle formalnym i precyzyjnym językiem, kogoś niekoniecznie zainteresowanego rozwiązywaniem praktycznych problemów teorii maszyn lub odkrywaniem tajemnic ruchu ciał niebieskich. Matematyczny formalizm zaczerpnięty z pierwotnych rozważań Hamiltona już dawno wyszedł poza zakres zainteresowań samej mechaniki i stał się podstawą współczesnej fizyki teoretycznej, także kwantowej.

Nie o tym jest jednak niniejsze opracowanie. Z założenia nie miało ono być wykładem wyczerpującym problemy mechaniki analitycznej z zachowaniem wszelkich zasad puryzmu matematycznej abstrakcji. Takich monografi powstało już wiele, wśród nich kilka żelaznych pozycji o międzynarodowej renomie, wielokrotnie wznawianych. Książka ta to mini-wykład skierowany do studentów i doktorantów, którzy niekoniecznie wiążą swój rozwój naukowy z mechaniką, lecz chcą na chwilę zajrzeć do tego świata z czystej poznawczej ciekawości, oraz do tych, którzy chcą związać się z mechaniką na dłużej i szukają sposobności, by od czegoś zacząć. Chcę tu pokazać, że skalarny gmach mechaniki analitycz-



nej, z którego można obserwować wektorowy kosmos Newtona, jest przyjazny i pożyteczny, a nade wszystko inspirujący.

Książka niniejsza powstała jako wynik przemyśleń i podsumowań towarzyszących wykładom pod tym samym tytułem, prowadzonym przez autora w latach 2012–2016 na Politechnice Warszawskiej na zaproszenie Centrum Studiów Zaawansowanych w ramach Konwersatorium i oferty wykładów podstawowych. Pragnę gorąco podziękować dyrektorowi CSZ, panu profesorowi Stanisławowi Janeczko za zaproszenie do udziału w misji Centrum, która stała się źródłem ogromnej satysfakcji w mojej pracy dydaktycznej, a także okazją do spotkania z niezwykle, nietuzinkową, nieskrępowaną i niepokorną osobowością naukową w najlepszym znaczeniu tego słowa, jaką reprezentuje prof. Janeczko. Było to spotkanie niecodzienne, wyraziste, napawające entuzjazmem i nadzieją.

Szczególne słowa wdzięczności i dziękczynienia kieruję także pod adresem pani mgr inż. Gabrieli Podbielskiej za ogromną pomoc w redakcji tego opracowania i wiarę w idee, o których ta monografia bezpośrednio nie mówi, lecz bez których nie powstałaby najpewniej wcale.

Piotr Przybyłowicz

