

Jerzy Kijowski

**Geometria różniczkowa
jako narzędzie
nauk przyrodniczych**



Jerzy Kijowski

Geometria różniczkowa jako narzędzie nauk przyrodniczych

Warszawa 2015

Jerzy Kijowski
Centrum Fizyki Teoretycznej PAN

Redaktor merytoryczny: **Stanisław Janeczko**

Skład redakcji: **Małgorzata Zielińska, Anna Żubrowska-Zembrzuska**

DTP: **Fixpoint**

Projekt okładki: **Małgorzata Zielińska**

© Copyright by Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej

Informacje na temat innych pozycji wydawniczych dostępne są pod adresem
www.csz.pw.edu.pl

ISBN: 978-83-61993-13-1

Niniejszy tekst jest rezultatem wieloletnich doświadczeń dydaktycznych autora, a także jego bolesnych zmagani wewnętrznych i kompromisów, zawieranych pomiędzy dążeniem do intuicyjnej prostoty a wymaganiami formalnej ścisłości. Napisanie tej książki nie byłoby możliwe bez wsparcia duchowego, jakiego autor doznaje nieustannie od swojej żony, Krystyny. Jej też jest dedykowany cały ten wysiłek.



Spis treści

1. Wstęp	9
1.1. Geometria a nauki przyrodnicze	9
1.2. Układy współrzędnych	12
1.3. Koncepcja wykładu	17
2. Rozwój pojęcia wektora stycznego	20
2.1. Eksperyment czy spekulacja myślowa?	20
2.2. Przestrzeń afiniczna	22
2.3. Wymiar przestrzeni afinicznej	26
2.4. Współrzędne prostoliniowe w przestrzeni afinicznej	28
2.5. Wektor zaczepiony w punkcie jako operator różniczkowy	30
2.6. Współrzędne wektora w krzywoliniowym układzie współrzędnych	35
2.7. Zmiana współrzędnych wektora odpowiadająca zmianie układu współrzędnych ...	39
2.8. Rozmaitości różniczkowe zanurzone w przestrzeni afinicznej. Przestrzeń styczna ..	39
2.9. Forma uwikłana a forma parametryczna rozmaitości zanurzonej	44
2.10. Abstrakcyjna rozmaitość różniczkowalna i jej przestrzeń styczna	48
2.11. Wiązka styczna do rozmaitości	50
2.12. Odwzorowania między rozmaitościami różniczkowalnymi. Odwzorowanie styczne	52
2.13. Krzywe sparametryzowane. Wektor styczny do krzywej	55
2.14. Superpozycja odwzorowań transportu. Inna definicja odwzorowania stycznego ...	58
2.15. Podrozmaitości	59
2.16. Własności globalne a własności lokalne	61
3. Algebra pól wektorowych. Układy dynamiczne	66
3.1. Pole wektorowe	66
3.2. Komutator pól wektorowych	67
3.3. Sens analityczny a sens geometryczny	70
3.4. Pole wektorowe jako układ dynamiczny. Jednoparametrowe grupy dyfeomorfizmów	73
3.5. Pole wektorowe jako infinitezymalna postać grupy dyfeomorfizmów	80
3.6. Uniwersalna postać pola wektorowego	82
3.7. Pochodna Liego	84
3.8. Komutator pól a przemienność grup dyfeomorfizmów	88
3.9. Dystrybucje i ich symetrie	94
3.10. Twierdzenie Frobeniusa	96
3.11. Ważny przykład pola wektorowego: prawa Keplera	99
4. Kowektory	109
4.1. Kowektor jako infinitezymalna funkcja kosztów. Różniczka funkcji. Wiązka ko-styczna	109
4.2. Transport odwrotny (<i>pull back</i>) kowektora	112
4.3. Całkowanie pola kowektorowego po krzywych. Orientacja rozmaitości	114

4.4.	Rozmaitość z brzegiem. Najprostsza wersja twierdzenia Stokesa	117
4.5.	Potencjalne pole sił. Najprostsza wersja lematu Poincarégo	121
4.6.	Uwagi na temat rozkładu jedności i „gładkiego dzielenia tortu”	123
4.7.	Uwagi o całkach niezorientowanych	125
5.	Formy różniczkowe	126
5.1.	Multi-kowektory. Wyznacznik jako forma objętości	126
5.2.	Formy różniczkowe. Całkowanie form po podrozmaitościach	132
5.3.	Iloczyn zewnętrzny. Współrzędniowy opis multi-kowektorów i form różniczkowych	135
5.4.	Przykład: całkowanie sił wywołanych ciśnieniem. Zewnętrzna a wewnętrzna orientacja powierzchni	140
5.5.	Różniczka zewnętrzna	144
5.6.	Transport i pochodna Liego pola kowektorowego oraz formy różniczkowej	149
5.7.	Twierdzenie Stokesa	153
5.8.	Przykłady i ćwiczenia dotyczące twierdzenia Stokesa	158
5.9.	Przykład zastosowania twierdzenia Stokesa; prawo Archimedesesa	163
5.10.	Lemat Poincarégo	164
5.11.	Postać dualna formy różniczkowej	171
5.12.	Geometryczny opis pola elektromagnetycznego	177
6.	Geometria Riemanna	181
6.1.	Struktura euklidesowa w przestrzeni afinicznej	181
6.2.	Uwagi na temat geometrii pseudoeuklidesowej	184
6.3.	Struktura Riemanna i tensor metryczny na rozmaitości	185
6.4.	Obraz odwrotny (<i>pull back</i>) tensora metrycznego	190
6.5.	Izomorfizm między przestrzenią styczną a ko-styczną generowany przez strukturę Riemanna	191
6.6.	Długość kowektora oraz multi-kowektora	193
6.7.	Przykład: jak obliczyć laplasjan funkcji w zmiennych krzywoliniowych	195
6.8.	Całki pierwszego rodzaju. Długość krzywej, pole powierzchni itd.	200
6.9.	Forma objętości	202
6.10.	Dualizm (gwiazdka) Hodge’a	204
6.11.	Gradient, dywergencja, laplasjan	210
6.12.	Interpretacja fizyczna całek z form różniczkowych	213
6.13.	Analiza wektorowa w przestrzeni trójwymiarowej. Iloczyn wektorowy i rotacja	217
6.14.	Pochodna Liego metryki. Pola Killinga	223
6.15.	Tensory	225
6.16.	Przykład. Funkcje sferyczne	231
7.	Teoria powiązania (koneksji)	239
7.1.	Pole grawitacyjne jako pole układów inercjalnych	239
7.2.	Problem ortodromy i geometrie nieeuklidesowe	242
7.3.	Matematyczny opis teorii powiązania	246
7.4.	Ważny przykład przestrzeni z powiązaniem. Opis ruchu w układzie nieinercjalnym	253
7.5.	Krzywizna	255
7.6.	Normalny układ współrzędnych	262
7.7.	Znikanie tensora krzywizny jako warunek dostateczny płaskości	263
7.8.	Pochodna kowariantna i transport równoległy	267
7.9.	Powiązanie według metody Koszula	270
7.10.	Tożsamości Bianchiego drugiego rodzaju	271
7.11.	Tensor Riemanna jako niesymetryczna część drugiej pochodnej kowariantnej	272
7.12.	Koneksja metryczna i symbole Christoffela	274

7.13. Pochodna Liego metryki i koneksji. Równanie Killinga	278
7.14. Krzywizna zewnętrzna	279
7.15. Współrzędne Gaussa	283
8. Geometria symplektyczna	286
8.1. Symplektyczne układy kontrolne	286
8.2. Wersja wektorowa geometrii symplektycznej. Mody kontrolne	292
8.3. Transformacje Legendre'a	295
8.4. Rozmaitość symplektyczna. Pola hamiltonowskie i nawiasy Poissona	300
8.5. Redukcja symplektyczna	303
8.6. Twierdzenie Darboux	305
8.7. Miara Liouville'a	307
8.8. Symplektyczna teoria kontroli w pełnej wersji nieliniowej. Przykłady z termodynamiki i mechaniki	308
8.9. Wersja infinitesimalna symplektycznej teorii kontroli. Rozważania heurystyczne ..	312
8.10. Trójka Tulczyjewa	316
8.11. Składanie relacji symplektycznych. Zasady wariacyjne	321
8.12. Równania Eulera–Lagrange'a	323
8.13. Teoria Hamiltona–Jacobiego	326
8.14. Linie geodezyjne jako ortodromy koneksji metrycznej	327
9. Posłowie	330
9.1. Grupy Liego	330
9.2. Abstrakcyjne wiązki włókniste	331
9.3. Koneksja w wiązce abstrakcyjnej	334
9.4. Cięcia wiązek	335
9.5. Jety	335
9.6. Rachunek wariacyjny całek wielokrotnych i związana z nim kanoniczna struktura symplektyczna	337
Literatura	341