CAS Lecture Notes 12

Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej
Warszawa

Stanisław Janeczko

# Teoria osobliwości

**Stanisław Janeczko**
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Redaktor merytoryczny: **Piotr Przybyłowicz**

Redakcja: **Małgorzata Zielińska**

Skład okładki: **Małgorzata Zielińska**

DTP: *Fixpoint Krzysztof Rudnik*



Informacje o innych wydawnictwach tej serii dostępne pod adresem www.csz.pw.edu.pl

ISBN: 978-83-61993-19-3
Wydrukowano w Polsce

# Spis treści

*Człowiek postanawia wymalować świat. Przez lata będzie zaludniał przestrzeń obrazami prowincji, królestw, gór, zatok, okrętów, wysp, ryb, pokoi, instrumentów, gwiazd, koni i ludzi. Na chwilę przed śmiercią odkryje, że ów cierpliwy labirynt linii jest podobizną jego własnej twarzy.*

*J.L. Borges*

# Przedmowa

Niniejsza książka powstała na bazie notatek do wykładów z teorii osobliwości, które prowadziłem na Uniwersytecie Warszawskim i Politechnice Warszawskiej i które we wstępnej wersji zostały wydane w postaci skryptu „Wybrane Zagadnienia Teorii Katastrof" przez Oficynę Wydawniczą PW w 2005 r. Wykład jest przeznaczony dla studentów II i III stopnia kierunków ścisłych i technicznych. Jest również dostępny dla studentów młodszych lat interesujących się metodami topologii różniczkowej i analizy geometrycznej w szczególności metodami modelowania matematycznego.

W książce zawarta jest podstawowa treść wykładu jak również materiał dodatkowy, rozszerzający, który może pozwolić studentowi uzupełnić swoją wiedzę o elementy zastosowań i techniczne detale niektórych dowodów. Do głównych celów wykładu należą:

1. Zapoznanie słuchacza z podstawowymi pojęciami teorii osobliwości funkcji i odwzorowań gładkich, które pozwalają przeprowadzić klasyfikację generycznych typów osobliwości i poznać podstawowe rezultaty dotyczące lokalnych własności kiełków w otoczeniu zdegenerowanych punktów krytycznych.
2. Przedstawienie tych idei, pojęć i twierdzeń, których uogólnienia i zastosowania w innych dziedzinach matematyki (na przykład w geometrii różniczkowej i analizie geometrycznej) odgrywają ogromną rolę.
3. Prezentacja działania metod teorii osobliwości przy rozwiązywaniu problemów matematycznych wyrosłych z fizyki matematycznej, optyki geometrycznej, teorii przejść fazowych, mechaniki etc.
4. Wskazanie, na wybranych przykładach, podstawowych zasad tworzenia modeli zjawisk w fizyce i w naukach przyrodniczych.

Próba dowodzenia podstawowych twierdzeń teorii osobliwości, na przykład twierdzenia o klasyfikacji stabilnych deformacji (rozwinięć) funkcji w punktach krytycznych, prowadzi do wielu skojarzeń w fizyce, biologii, socjologii, filozofii etc. Stąd trzy, do pewnego stopnia niezależne rozdziały książki.

Twórcą idei i tej części matematycznej teorii osobliwości, która jest prezentowana w niniejszym materiale, jest wybitny matematyk francuski René Thom. Badając generyczne — typowe własności punktów krytycznych funkcji i odwzorowań gładkich – sformułował on (zob. [34, 35, 36, 37]) podstawy teorii mającej wyjaśniać strukturalne przemiany form zarówno w matematyce czy fizyce, jak i w naukach przyrodniczych. Podstawowe twierdzenie tej teorii (twierdzenie Thoma) podaje skończoną klasyfikację lokalnych postaci stabilnych rodzin funkcji — potencjałów parametryzowanych nie więcej niż pięcioma parametrami kontrolnymi przestrzeni konfiguracyjnej. Pojawiła się lista 11, a w przypadku czterech parametrów kontrolnych 7, katastrof elementarnych R. Thoma. Są to diagramy bifurkacyjne w przestrzeni parametrów rodziny, opisujące punkty przemian rodzaju degeneracji osobliwych punktów krytycznych w stabilnej rodzinie potencjałów. Potencjały w fizyce matematycznej grają rolę funkcji generujących dla powierzchni — podrozmaitości Lagrange'a stanów równowagi w przestrzeni fazowej układu fizycznego. Stąd jest niezwykle użyteczny pomost pomiędzy analizą i topologią różniczkową a geometrią i matematyczną fizyką. Pomost ten tworzy szczególnie intensywnie rozwijająca się obecnie dziedzina matematyki — geometria symplektyczna. Naturalne rozszerzenie wyników teorii osobliwości przy badaniu generycznych własności reprezentatywnych obiektów geometrii symplektycznej, takich jak na przykład podrozmaitości Lagrange'a czy ogólnie podzbiory izotropowe względem struktury symplektycznej, przyniosły wyczerpującą klasyfikację kaustyk, osobliwości czół fali i złożonych systemów promieni pojawiających się w geometrii Riemanna z brzegiem (zob. [5, 2, 3]).

Rozdział I jest poświęcony wprowadzeniu do teorii osobliwości. Sednem tej teorii są twierdzenia globalne o własnościach lokalnych takich obiektów jak funkcje, odwzorowania, pola wektorowe, formy różniczkowe oraz inne obiekty geometrii i analizy. Wprowadza się więc pojęcie kiełka odwzorowania i podaje jego pełną charakteryzację przy użyciu dżetów. Istotnie wykorzystuje się tutaj ogólniejszą wersję twierdzenia o funkcji uwikłanej, która była uzyskana przez wybitnego matematyka francuskiego J.P. Tougerona. Dalsze badanie punktów krytycznych funkcji prowadzi się, wprowadzając pojęcie rozwinięcia i rozwinięcia uniwersalnego kiełka. W znacznej części tego rozdziału wykorzystuje się metody algebry lokalnej; lemat Nakayamy i algebraiczną wersję twierdzenia przygotowawczego Malgrange'a. Geometryczno-topologicznych metod dostarcza twierdzenie o transwersalności R. Thoma, którego wersja dżetowa jest głównym narzędziem przy dowodzeniu lokalnej stabilności rozwinięć uniwersalnych. Pojęcie stabilności jest centralnym pojęciem teorii osobliwości i teorii katastrof. Częścią zamykającą rozdział I jest klasyfikacja kiełków osobliwych i ich stabilnych rozwinięć. Klasyfikuje się kiełki ze względu na „ułożenie" ich orbit w przestrzeni wszystkich orbit; tzw. pojęcie prostoty kiełka wprowadzone przez V.I. Arnolda (zob. [2]) pozwala podać wyczerpującą i użyteczną klasyfikację najbardziej naturalnych osobliwości, których reprezentanty przyjmują postaci wielomianowe bez tzw. parametrów modalności. Postaci normalne osobliwości stabilnych, tzn. najprostsze wielomianowe postaci kiełków, reprezentantów odpowiednich orbit, są wyprowadzone do wymiaru 5 przestrzeni parametrów rozwinięcia. Dedukcja katastrof elementarnych z uzyskanej klasyfikacji jest już natychmiastowym wnioskiem.

Dziedziną, w której teoria osobliwości znalazła swoją naturalną reprezentację, jest geometria symplektyczna. W rozdziale II wprowadza się pojęcie podrozmaitości Lagrange'a — podstawowe pojęcie mechaniki, optyki, teorii pola, termodynamiki etc. Klasyfikację podrozmaitości Lagrange'a prowadzi się poprzez klasyfikację ich rzutów na bazę wiązki ko-stycznej, która jest sztandarowym przykładem przestrzeni symplektycznej. Zostały tutaj przedstawione rezultaty uzyskane w okresie ostatnich dwudziestu lat, także te dotyczące osobliwości układów promieni optycznych uginających się na gładkich powierzchniach i na przysłonach. Są to niezwykle elementarne i głębokie rezultaty, więc koniecznie powinny wejść do programu wykładów na starszych latach studiów. Bardziej konsekwentną część rozdziału II stanowi klasyfikacja typowych, symetrycznych podrozmaitości Lagrange'a i symetrycznych kaustyk. Stosowane tutaj metody są modyfikacją standartowych metod teorii osobliwości w przypadku bez symetrii. Jednak różnice w wynikach i wnioskach są zaskakujące i zasadnicze. Rozważa się najprostszą grupę symetrii $Z_2$ — symetrię względem odbicia – i dla takiej symetrii prowadzi się klasyfikację kaustyk w niskich wymiarach przestrzeni fazowej. Ten rozdział zawiera nowe rezultaty niepublikowane dotychczas oraz niepublikowane w monografiach. Ze względu na nieobojętny sens fizyczny podstawowych obiektów rozdział II może być zaliczony do kursu matematycznej fizyki.

Nazwa „teoria katastrof" łączy się z zastosowaniem twierdzeń klasyfikujących rozwinięcia uniwersalne osobliwości w naukach przyrodniczych i została rozpropagowana w pracach wybitnego matematyka brytyjskiego E.C. Zeemana. Początkowe sukcesy tego podejścia i piękne prace, które ukazały się we współpracy matematyków, biologów, socjologów, lekarzy, pokazały jednocześnie bardzo wyraźnie granice stosowalności tzw. elementarnej teorii katastrof. Wówczas wielu matematyków zwróciło się ku teorii osobliwości, a przyrodnicy dla których język matematyczny teorii katastrof był zbyt hermetyczny, ograniczyli się do automatycznego powtarzania w różnych kontekstach, często z deformacją, konstrukcji stworzonych przez E.C. Zeemana. W rozdziale III zostały podane modele matematyczne: pracy serca, działania partii politycznych, akcji neuronu, i pewne uwagi systematyzujące proces formalizacji zjawisk. Przy pisaniu tego rozdziału korzystałem z pionierskich wykładów teorii katastrof prowadzonych przez Jacka Komorowskiego, w 1975 roku na Wydziale Matematyki UW, za co składam mu gorące podziękowanie.

Treść wykładu przewiduje znajomość podstawowych kursów analizy matematycznej, algebry z geometrią i geometrii różniczkowej (zob. [27, 23, 24, 3]). Do ważniejszych, opracowanych poza wykładem tematów należy zaliczyć klasyfikację kaustyk w przestrzeniach z symetrią oraz kwazikaustyk — uogólnionych zbiorów bifurkacyjnych w obecności osobliwego brzegu.