CAS TEXTBOOKS 2

Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej
Warszawa

Michał Szurek

Metody geometryczne

Michał Szurek

Redaktor merytoryczny: **Stanisław Janeczko**

Skład redakcji: **Małgorzata Zielińska, Anna Żubrowska**

Projekt graficzny i skład okładki: **Emilia Bojańczyk / Podpunkt**

Informacje o innych wydawnictwach tej serii dostępne pod adresem www.csz.pw.edu.pl

ISBN: 978-83-61993-08-7
Wydrukowano w Polsce

Spis treści

Wstęp

Książka ta jest zapisem moich wykładów dla doktorantów Politechniki Warszawskiej prowadzonych w latach 2007–2010. Wykłady są ze sobą luźno powiązane. Ułatwiało to słuchaczom – często zajętym sprawami związanymi bezpośrednio z pisaniem pracy doktorskiej – nadążanie za tokiem zajęć.

Wykład pierwszy poświęcony jest rozważaniom historycznym, z domieszką filozofii, mówimy też o uprawianiu matematyki. Następne dwa dotyczą krzywych. Najpierw przypominamy elementarną geometrię różniczkową, a potem koncentrujemy się na jednej, wybranej krzywej: cykloidzie. Przypominamy zapomniany już rachunek wielkości nieskończenie małych – intuicyjną technikę, wypartą w XIX wieku przez ścisły język „epsilonowo-deltowy". Wykład piąty poświęcony jest zadaniom z zakresu przepływu prądu, ale traktujemy te problematykę jako czystą geometrię. W szóstym wędrujemy po powierzchniach, a w siódmym też – tyle, że niemal niezauważenie wchodzimy do geometrii nieeuklidesowej. Wykład ósmy zawiera podstawy geometrii euklidesowej w przestrzeniach dowolnego wymiaru.

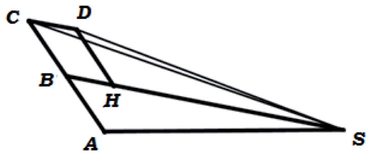
Tytuł książki można rozumieć dwojako. Naturalnym, i bardziej zgodnym z regułami języka polskiego rozwinięciem, jest, że oto w książce spośród wielu sposobów rozwiązania danego zadania (a priori niekoniecznie matematycznego) omawia się te, które przede wszystkim posługują się geometrią. Ale można dostrzec i ślad innej interpretacji: może chodzi o to, jakich metod używa się w geometrii?

W książce, która nie jest podręcznikiem, przeważa pierwsza interpretacja tytułu. Co można zrobić, (w domyśle: lepiej), gdy zamiast *obliczać*, najpierw *narysujemy*, a potem *pomyślimy*? Oto pierwszy przykład, bardzo szkolny, ale pouczający. Jaką krzywą zakreśla środek odcinka, którego obydwa końce poruszają się po prostych prostopadłych? Aha, myślimy, skoro mamy wyznaczyć krzywą, to znajdźmy jej równanie. Wprowadźmy układ współrzędnych, niech długością odcinka będzie a. Jeżeli jeden z końców odcinka jest w punkcie $(x,0)$, to drugi w $(0, y)$, gdzie y wynosi, chwileczkę, aha, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, a zatem środek to $(x/2, \sqrt{a^2 - x^2}/2)$, do licha, co to za krzywa? Może hiperbola? Oj, zaraz się przekonamy, możemy przecież to sobie wszystko narysować. Bierzemy program, który ma podstawową grafikę, wczytujemy, naciskamy Enter i widzimy … ćwiartkę okręgu.

A jak to rozwiązać? Wystarczyło rozumowanie geometryczne: ślizgający się odcinek wyznacza na obu prostopadłych osiach odcinki x, y. Twierdzenie Pitagorasa daje natychmiast, że $x^2 + y^2$ ma stałą wartość, a więc przy ślizganiu się środek zachowuje też stałą odległość od początku układu. Szukaną krzywą jest łuk okręgu.

Oto bardziej poważny przykład. Czytelnicy tej książki znają drugie prawo Keplera: w równych odstępach czasu promień wodzący planety poprowadzony od Słońca zakreśla równe pola. Można to prawo wyprowadzić z własności stożkowych i zasady zachowania momentu pędu planety, posługując się rachunkiem różniczkowym. A oto, jak to tłumaczy Voltaire (Wolter, 1694–1778), przypisując zresztą rozumowanie Newtonowi([1]):

> Podam treść dowodzenia Newtona; łatwo bowiem zrozumie je uważny czytelnik, ludzie bowiem posiadają w swym umyśle matematykę naturalną, pozwalającą im pojąć matematyczne stosunki, jeśli tylko nie są zbyt skomplikowane.



> Niech ciało A przejdzie do B w bardzo krótkim czasie; przy końcu mniej więcej takiego samego okresu ruch jednostajny (nie ma tu bowiem wcale przyspieszenia) doprowadziłby je do C. Ale w B ciało to znajduje siłę, która popycha je po prostej BHS; nie podąży więc ono ani drogą BHS, ani drogą ABC. Poprowadźcie równoległobok $CDHB$, wówczas ciało, poruszane siłą BC i siłą BA, pojmowanej jako nieskończenie małe, są zaczątkiem krzywej; rozumując tak dalej dojdziemy do wniosku, że ciało to musi poruszać się po krzywej.
> Ciało to musi w równych czasach zakreślać pola równe: pole trójkąta SBA jest równe polu trójkąta SDB, ponieważ trójkąt SBA jest równy trójkątowi SBC, jako że trójkąty te mają wspólny wierzchołek S oraz podstawy AB i BC równe, zaś trójkąt SBC jest równy trójkątowi SBD (trójkąty te mają wspólną podstawę BS, a ich wierzchołki D, C leżą na tej samej linii równoległej do podstawy BS, zatem pola tych trójkątów są równe). Dlatego każde ciało, wprowadzone w ruch pociskowy i przyciągane przez stały ośrodek, zakreśla pola proporcjonalne do czasu

([1]) *Elementy filozofii Newtona*, 1956, PWN, Warszawa. W 2011 roku ukazało się polskie tłumaczenie (autorstwa Jarosława Wawrzyckiego) dzieła Newtona *Matematyczne zasady filozofii przyrody*. Jest to wydarzenie o wielkim znaczeniu dla naszej kultury!

> i na odwrót, każde ciało, które przebiega po krzywej pola równe w równych czasach, może być traktowane jako znajdujące się pod działaniem siły przyciągającej je ku środkowi tych pól (...).

Tyle Voltaire. Czego możemy się nauczyć, analizując powyższy tekst? Po pierwsze, wyjaśnia on nurtujące na pewno wszystkich pytanie, jak nasi poprzednicy mogli odkrywać prawa rządzące naturą, kiedy one wymagają tak skomplikowanej matematyki? Po prostu rozumowali geometrycznie, a „nas" obowiązuje inny paradygmat uprawiania matematyki, wykształcony przez przedpoprzednie stulecie. Wszystko ma być ujęte w języku epsilonowo-deltowym, w notacji teorii mnogości, wyliczone algebraicznie, nawet podparte autorytetem Komputera, a nie „wyżonglowane" – choćby poprawnie i przede wszystkim przekonująco – z mglistych intuicji geometrycznych, dotyczących wielkości nieskończenie małych.

> Tu nikt nie może być pewien. To nie nauki ścisłe. (Wypowiedź jednego z przysięgłych w filmie „Dwunastu gniewnych ludzi", reż. Sidney Lumet, 1957).

Ale nie jest tak źle, nie musimy cofać biegu historii nauki. Thomas Kuhn w swoim słynnym dziele *Struktura rewolucji naukowych* (1968) opisał rozwój *nauki normalnej*. Takim terminem określił stadium, w którym w danej dyscyplinie naukowej rozwój jest stabilny: gromadzone są kolejne odkrycia, rozwiązywane coraz to nowe łamigłówki, odkrywane coraz to nowe obszary. W pewnym momencie następuje kryzys, przez pewien czas trwa walka starego z nowym i jak zwykle zwycięża nowe. Stare zostaje zapomniane. Podręczniki akademickie pisze się na nowo, stare mają ograniczone wzięcie w antykwariatach. „Tak ma być" zapewnia nas Kuhn: „tylko zła nauka *nie zapomina* o swoich luminarzach." Coś za coś – widzimy wszystko ogólniej, rozumiemy coraz więcej (i coraz więcej przed nami zagadek). Postęp, prawdziwy postęp.

I tylko czasem ... koni żal.

Ryszard Kapuściński napisał w jednym ze swoich Lapidariów: „Arabowie kochali się w abstrakcji i jej najwyższym przedstawieniu – w geometrii. Rysunek geometryczny - jakby otwierał przed nimi świat, ale to złudzenie, bo przecież on jest kresem, tym właśnie światem".

Już w trakcie wykładów, a potem w trakcie pisania, stanąłem przed kilkoma trudnościami. Pierwsza z nich to kłopot z wyborem materiału i poziomem abstrakcji. Słuchacze są już ludźmi ukształtowanymi naukowo, zaawansowani w pracach nad uzyskaniem stopnia i tylko niewielu z nich potrzebuje zdobycia sprawności w kolejnej dyscyplinie matematycznej, a jeśli nawet, to przy każdym wyborze materiału zadowolona będzie tylko mała grupa słuchaczy. Następna trudność była raczej przyjemnym wyzwaniem. Zarówno na politechnice, jak i na wielu innych uczelniach, matematyka jest przedmiotem pomocniczym, użytkowym.

Na ogół nie pokazuje się tam matematyki ani jako sztuki, ani jako pewnej filozofii, ani – co oczywiste na wydziałach technicznych, ekonomicznych i nawet przyrodniczych – nie próbuje się dostrzec w matematyce aspektów nauki humanistycznej i nie dyskutuje się o roli matematyki w kulturze. Czy da się napisać podręcznik matematyki, który byłby również o tym?

Nie pamiętam, kto jest autorem dość zjadliwego powiedzenia, że nauki techniczne nie dają człowiekowi nic oprócz samej wiedzy. Kontynuując takie dywagacje, możemy zauważyć, że klasyczne nauki humanistyczne przypominają dobrą poczciwą żonę, która zrobi czasem awanturę, ale z reguły da się udobruchać. Nauki ścisłe przywodzą raczej na myśl zazdrosną i wymagającą kochankę, która w każdej chwili może powiedzieć „idź sobie". Te myśli również wpływały silnie na treść i sposób prezentacji wykładów.

Następna trudność wynikała ze znacznego zróżnicowania umiejętności i wykształcenia matematycznego studentów, będących doktorantami najrozmaitszych wydziałów. Dlatego i stopień wykładów był niejednolity. Był to świadomy wybieg. Od czasu do czasu większość słuchaczy (ale nie wszyscy) mówiło „ależ to wiemy", ale niekiedy wykład rozumiało niewielu słuchaczy.

W książce często dowodzę tej samej rzeczy kilka razy, z kolei niektóre dowody pomijam. Jest to oczywiście zamierzone. Co do rozwiązywania tego samego zadania kilkoma metodami – ze zdziwieniem obserwuję niechęć nauczycieli do takiej pracy. Zadanie rozwiązane – to nie ma sensu rozwiązywać drugi raz. Pacjent wyleczony, szczyt zdobyty, kran naprawiony. Po co leczyć dalej, wchodzić jeszcze raz, naprawiać naprawione? Z absurdalnością takiego stanowiska nawet nie chce mi się dyskutować. Szkoda, że jest to zjawisko dość częste. Z kolei pomijanie dowodów jest źle widziane przez zawodowych matematyków, którzy chcą mieć świadomość, że ogarniają całość swojej wiedzy – od aksjomatów po najtrudniejsze twierdzenia. Stoję na stanowisku, że można niekiedy doskonale rozumieć istotę twierdzenia, nie znając dowodu. Poza tym przemawia do mnie opinia wyrażona między innymi przez wybitnego niemieckiego matematyka, Hermanna Weyla (1885–1955): „istota matematyki tkwi w przykładach". Również dlatego w książce jest dużo przykładów, a stosunkowo niewiele ogólnych twierdzeń.

Praktycznie nie ma w książce rozwinięcia „programu z Erlangen", w którym Felix Klein (1849–1925) określił geometrię jako naukę o niezmiennikach grup przekształceń.

Wymienię kolejną trudność. Stanęła ona przede mną po raz pierwszy od czasu profesjonalnego zajmowania się matematyką, czyli od ponad czterdziestu lat. Jest wyzwaniem dla pokolenia, do którego należę. Jak pisać podręczniki, zwłaszcza dla dorosłych, kiedy wszystko jest do znalezienia w Internecie? Po co otwierać zadrukowane kartki papieru – naciśnij klawisz! Chodzi mi oczywiście o to, że można sobie wyobrazić książkę do matematyki jako prosty przewodnik po stronach internetowych. Przecież to czego nie ma w sieci, nie istnieje w ogóle.

W tabelce po lewej stronie lista tematów, po drugiej odnośniki do stron internetowych. Absurd? Tak, ale wcale nie taki oczywisty. A co zrobić, kiedy komputery (dokładniej: programy napisane przez matematyków) uwalniają nas od żmudnych obliczeń, a niekiedy i od myślenia, zastępując je właśnie obliczeniami? Wielu kolegów w moim wieku „obraziło się" na komputery. Są dumni z dochowania „wiary przodków". Czy słusznie?

Zatem i na wykładach i w książce starałem się posługiwać kilkoma programami typu *CAS* (*Computer Algebra System*) – programami obliczeniowymi, wykonującymi (co najbardziej istotne) rachunki symboliczne. Przeważnie był to program *Mathematica* w wersji 7.0.

Postawione pytania i zasiane wątpliwości stały, a raczej wisiały nad moją głową. Świadomość tego wpłynęła na zawartość książki i styl pisania, a także na sposób doboru literatury uzupełniającej, który w dobie Internetu powinien być inaczej konstruowany. Stron internetowych, z których korzystałem, nie wymieniam. Z przeglądarek najbardziej kompetentna jest *Wolfram MathWorld*.

Wreszcie, wykłady te stanowiły pewną próbę nauczania matematyki trochę inaczej. Mieszanka starych, zapomnianych metod, z nowoczesną algebrą komputerową wydaje się być mieszanką cukru z solą. Czy tak jest niech osądzą Czytelnicy.