CAS Lecture Notes Numer 9

Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej
Warszawa

Irmina Herburt
Maria Moszyńska

Narzędzia geometrii

Irmina Herburt
Maria Moszyńska

Redaktor merytoryczny: **Stanisław Janeczko**

Skład redakcji: **Małgorzata Zielińska, Anna Żubrowska**

Projekt graficzny i skład okładki: **Emilia Bojańczyk**

Informacje o innych wydawnictwach tej serii dostępne pod adresem www.csz.pw.edu.pl

ISBN: 978-83-61993-12-4
Wydrukowano w Polsce

Książka ta powstała na podstawie cyklu wykładów „Narzędzia geometrii" prowadzonych w latach 2011, 2012 i 2013 dla doktorantów Politechniki Warszawskiej w ramach Centrum Studiów Zawansowanych Politechniki Warszawskiej. Ponieważ w wykładach uczestniczyli doktoranci różnych kierunków studiów, materiał został tak wybrany, aby do jego zrozumienia wystarczyły umiejętności z zakresu standardowego kursu matematyki na studiach licencjackich lub inżynierskich Politechniki Warszawskiej.

Celem wykładów było zapoznanie słuchacza z narzędziami współczesnej geometrii wraz z przykładami zastosowań. Wybrane zostały następujące tematy:

1. Geometria metryczna – dlaczego warto szukać uogólnień;
2. Geometria fraktalna – o zbiorach samopodobnych i kodowaniu obrazu;
3. Geometria analityczna – równania krzywych i powierzchni;
4. Geometria różniczkowa – o powierzchniach, pierwszej formie oraz o tym dlaczego mapy na sferze nie można przedstawić na płaszczyźnie z zachowaniem odległości;
5. Geometrie nieeuklidesowe – jaka jest geometria wszechświata.

W ramach każdego tematu materiał teoretyczny został ograniczony do minimum potrzebnego do przedstawienia zagadnienia i zrozumienia zastosowań.

Podobne założenia zostały przyjęte przy pisaniu książki. Materiał książki przeplatany jest ćwiczeniami, które pomogą czytelnikowi zorientować się, czy ten materiał zrozumiał.

Dziękujemy słuchaczom wykładów – doktorantom Politechniki Warszawskiej. Ich zainteresowanie, uwagi i pytania stanowiły inspirację do opracowania przedstawionego w książce materiału.

Autorki

Spis treści

Wstęp 7
1. Geometria metryczna 10
2. Więcej o przestrzeniach metrycznych 16
3. Kontrakcje 19
4. Metryka Hausdorffa 25
5. Operator Hutchinsona 29
6. Kodowanie zbiorów niezmienniczych 35
7. Kodowanie podzbiorów przestrzeni kartezjańskiej R^n 41
8. Kompresja i dekompresja obrazu 43
9. Krzywe w przestrzeni metrycznej 46
10. Krzywe gładkie 55
11. Nierówność izoperymetryczna 60
12. Powierzchnie w R^3 – definicja i proste przykłady 64
13. Dziwne powierzchnie w R^3. Metryka wewnętrzna i izometrie wewnętrzne 71
14. Powierzchnie gładkie 76
15. Zastosowania pierwszej formy podstawowej 80
16. Geometrie nieeuklidesowe 89
Literatura 96

Wstęp

Geometria była używana od wieków do opisu otaczającego świata a także w różnych dziedzinach matematyki. Na początek pokażemy na trzech przykładach, jak różne mogą być zastosowania narzędzi geometrycznych.

Znane od czasów starożytnych twierdzenie Pitagorasa ma wiele dowodów. Przytoczymy tu jeden z nich, dowód geometryczny podany przez Euklidesa [17].

0.1. Twierdzenie Pitagorasa. *Dany jest trójkąt prostokątny o wierzchołkach A, B, C i kącie prostym przy wierzchołku C. Jeżeli a, b, c są długościami boków przeciwległych odpowiednio punktom A, B, C, to*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Dowód. Wykorzystuje się następujące dwa fakty dotyczące pól trójkątów:

- trójkąty o wspólnej podstawie i trzecim wierzchołku leżącym na prostej równoległej do podstawy mają równe pola;
- każda izometria płaszczyzny, w szczególności każdy obrót, zachowuje pole dowolnego trójkąta.

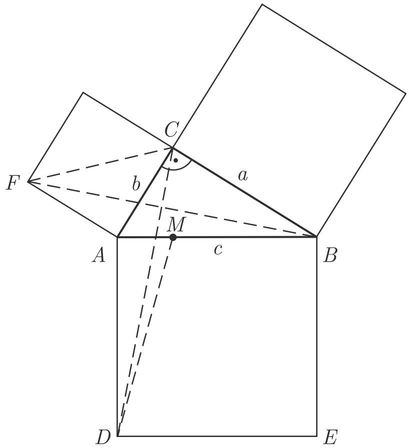
Korzystając z tych faktów, pokazujemy (rys. 1), że jeżeli M jest spodkiem wysokości trójkąta $\Delta(ABC)$ z wierzchołka C, to

$$\frac{1}{2}b^2 = P(\Delta(ACF) = P(\Delta(AFB)) = P(\Delta(ACD)) = P(\Delta(AMD)).$$

Analogicznie dowodzimy, że

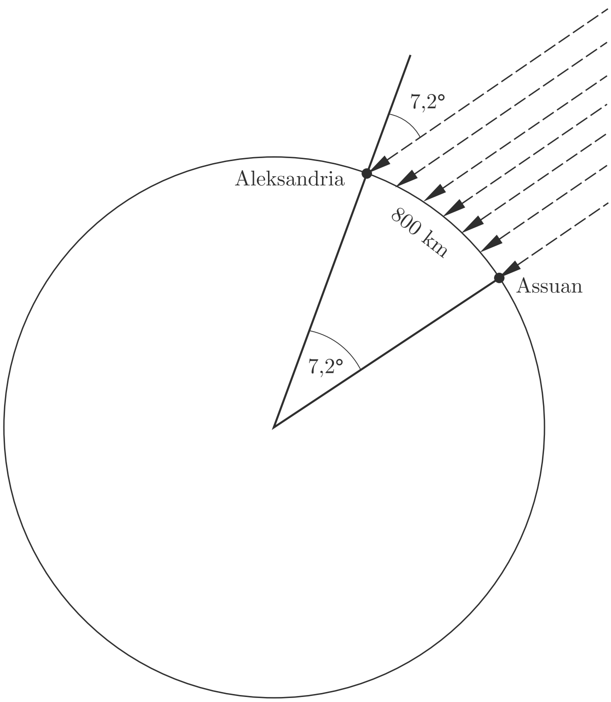
$$\frac{1}{2}a^2 = P(\Delta(EMB)).$$

Zatem kwadrat o wierzchołkach A, B, D, E, o polu c^2, został podzielony na dwa trójkąty o polach $\frac{1}{2}a^2$ i dwa trójkąty o polach $\frac{1}{2}b^2$. Stąd otrzymujemy $c^2 = a^2 + b^2$. $\square$



Rys. 1. Dowód Euklidesa Twierdzenia Pitagorasa

0.2. Jak Eratostenes zmierzył długość równika. Około roku 230 p.n.e. Eratostenes udowodnił, że równik („obwód Ziemi") ma długość 40 tys. km. Jego „pomiar" jest oparty na tym, że kąt między kierunkami prostopadłymi do po-



Rys. 2. Jak Eratostenes zmierzył obwód Ziemi

wierzchni ziemi w dwóch punktach jest proporcjonalny do odległości „sferycznej" tych punktów, tzn. długości łuku wielkiego okręgu przechodzącego przez te dwa punkty. Eratostenes wiedział, że odległość między Aleksandrią i leżącym na południe od niej (blisko zwrotnika Raka) Assuanem wynosi około 800 km. Kąt między kierunkami prostopadłymi do powierzchni Ziemi w Aleksandrii i Assuanie zmierzył, badając kąt padania promieni słonecznych w Aleksandrii w dniu, w którym promienie słoneczne padały w Assuanie prostopadle (patrz rys. 2).

Obliczył, że kąt ten jest równy 7,2°. Ponieważ $7{,}2^\circ = \frac{1}{50} \cdot 360^\circ$, więc 800 km stanowi $\frac{1}{50}$ długości równika.

Obliczenia Eratostenesa są obarczone pewnym błędem, ponieważ w rzeczywistości Aleksandria i Assuan leżą tylko w przybliżeniu na tym samym południku: współrzędne geograficzne Aleksandrii są 31,2 N i 29,92 E, a Assuanu – 24,05 N i 32,54 E (zwrotnik Raka – 23,26 N).

0.3. Dlaczego warto uogólniać. Wyobraźmy sobie, że kulę ziemską opasano wzdłuż równika ściśle przylegającą taśmą, a następnie przedłużono tę taśmę o 1 metr, zachowując jej „kolisty kształt". Czy mysz może przecisnąć się teraz pod tą taśmą?

Niech l będzie długością równika, r – jego promieniem a R – promieniem większego koła utworzonego przez przedłużoną taśmę. Ponieważ $l = 2\pi r$, więc

$$2\pi R = 2\pi r + 1,$$

a zatem

$$R - r = \frac{1}{2\pi} > \frac{1}{8}.$$

Ten wynik jest o tyle zaskakujący, że nie zależy od r! Oczywiście przez szparę szerokości większej niż $\frac{1}{8}$ m przejdzie nawet kot [3].