

Witold Prószyński

**Odporność wewnętrzna modeli
liniowych na zaburzenia
w danych obserwacyjnych
– obserwacje nieskorelowane
i skorelowane**

prof. dr hab. inż. Witold Prószyński
Wydział Geodezji i Kartografii
Politechnika Warszawska

Korekta: **Krystyna Dziewanowska-Stefańczyk**

Redaktor merytoryczny: **Stanisław Janeczko**

Skład redakcji: **Małgorzata Zielińska, Anna Żubrowska**

Projekt graficzny i skład okładki: **Emilia Bojańczyk / Podpunkt**

© Copyright by Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej,
Warszawa 2012

Informacje o innych wydawnictwach tej serii dostępne pod adresem www.csz.pw.edu.pl

ISBN: 978-83-61993-06-3

Wydrukowano w Polsce

Spis treści

Przedmowa.....	1
1. Wprowadzenie	3
2. Podstawowe pojęcia i stosowane dla nich oznaczenia	7
2.1. Układy liniowe, niesprzeczne i sprzeczne.....	7
2.2. Odwrotności uogólnione macierzy, pseudoodwrotność.....	11
2.3. Operatory rzutowania i ich podstawowe własności	14
2.4. Defekt modelu i sposoby postępowania w przypadku jego zaistnienia	18
2.5. Liniowe modele losowe, standaryzacja modelu	19
3. Miary odporności wewnętrznej dla modeli z obserwacjami nieskorelowanymi ..	22
3.1. Relacja zaburzenie/odpowiedź w modelu liniowym	22
3.2. Relacja zaburzenie/odpowiedź w modelach liniowych z warunkami na niewiadome	26
3.3. Kryteria odporności wewnętrznej dla przypadku pojedynczego zaburzenia i wielu zaburzeń	27
3.4. Przykłady liczbowe	29
4. Miary odporności dla modeli z obserwacjami skorelowanymi	34
4.1. Relacja zaburzenie/odpowiedź w modelu liniowym	34
4.2. Miary odporności dla przypadku pojedynczego zaburzenia	36
4.3. Kryterium odporności dla przypadku pojedynczego zaburzenia	38
4.4. Przykłady liczbowe	39
5. Przestrzeń zaburzeń niedostrzegalnych w liniowych modelach losowych	43
5.1. Definicja i ważniejsze własności przestrzeni zaburzeń niedostrzegalnych ...	43
5.2. Przykład liczbowy (geodezyjny/dowolny)	48
5.3. Aspekt probabilistyczny występowania w praktyce wektorów należących do przestrzeni ZN	50
6. Analiza odporności dla układów z dodatkową wiedzą o parametrach.....	53
6.1. Metoda analizy odporności.....	53
6.2. Przykłady liczbowe	55
7. Analiza odporności wewnętrznej dla modeli „Errors-In-Variables”	59
7.1. Zależność zaburzenie/odpowiedź w zlinearyzowanym modelu EIV	60



7.2. Wskaźniki i kryteria odporności wewnętrznej dla zlinearyzowanego modelu EIV	62
7.3. Wzory dla specyficznych przypadków modeli EIV	63
7.3.1. Wielokrotna regresja liniowa	63
7.3.2. Transformacja konforemna (2D)	65
7.3.3. Transformacja afiniczna (3D).....	66
7.4. Przykłady liczbowe analizy odporności modeli losowych w podejściu TLS i OLS	67
8. Własności uzupełniające operatorów rzutowania	76
8.1. Własności uzupełniające operatora rzutu ortogonalnego	76
8.2. Interpretacja geometryczna operatora rzutu ortogonalnego	78
8.3. Własności uzupełniające operatora rzutu ukośnego	83
8.4. Własności operatora rzutowania dla modelu EIV.....	85
9. Aspekt praktyczny analiz odporności wewnętrznej modeli obserwacyjnych	87
Wykorzystana literatura	89



Przedmowa

W niniejszym opracowaniu zebrano i w znacznym stopniu rozszerzono treści wykładu specjalnego poprowadzonego przez autora w ramach Centrum Studiów Zaawansowanych w Politechnice Warszawskiej w semestrze letnim roku akademickiego 2010/2011. Wykład ten był zakwalifikowany jako średnio zaawansowany, wymagający od słuchacza elementarnej wiedzy z zakresu algebry liniowej, rachunku macierzowego i probabilistyki.

Kierowany był do osób zajmujących się pomiarami i mających do czynienia z nadokreślonymi układami równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych, stanowiącymi oryginalne lub zlinearyzowane modele zadań pomiarowych. Występujące w tych układach wielkości podlegające pomiarowi mogły być zmiennymi losowymi nieskorelowanymi bądź skorelowanymi.

Podstawy teoretyczne wykładu zostały zaczerpnięte z opracowań źródłowych z zakresu niezawodności sieci geodezyjnych oraz badań własnych autora, prowadzonych od wielu lat na gruncie problematyki pomiarów geodezyjnych dla obiektów inżynierskich wysokiego ryzyka, tj. wymagających wysokiej wiarygodności finalnych wyników monitoringu. Uzyskiwane sukcesywnie spostrzeżenia i prawidłowości o charakterze ogólnym zaczęły stopniowo nasuwać myśl o możliwości poszerzenia zakresu potencjalnych zastosowań poza sferę problematyki geodezyjnej.

Pod względem swej bazy pojęciowej wykład lokuje się w obszarze zastosowań matematyki dla potrzeb metrologii, w szczególności geodezji. Wprowadzone własności operatorów rzutowania, stanowiące uzupełnienie własności podawanych w literaturze z zakresu podstaw algebry, są wynikiem szczegółowych rozważań autora bazujących na własnościach definicyjnych tych operatorów. **Należy wyraźnie zaznaczyć, że prezentowane podejście pełni rolę podbudowy pojęciowej dla analiz układów obserwacyjnych w fazie ich projektowania, analiz dających wskazania do takiego ukształtowania tych układów, aby mogły one zapewnić satysfakcjonujący poziom efektywności wykrywania ewentualnych błędów grubych rezydujących w materiale obserwacyjnym. Opracowanie nie wkracza w sferę konstruowania sforma-**



lizowanych metod projektowania pozwalających uzyskiwać modele o takich własnościach.

Ze względu na kierowanie niniejszego opracowania do osób niekształcących się w zakresie profesjonalnej matematyki, w wykładzie często będzie prezentowana jako wspomaganie metodyczne interpretacja geometryczna omawianych pojęć, a także będą przedstawiane wykresy uzyskiwanych zależności. Ponadto, aby ułatwić przyswajanie materiału osobom nieobeznanym z problematyką geodezyjną, oprócz przykładów zaczerpniętych z tej dyscypliny będą też przykłady prezentujące dowolne układy równań nieprzyporządkowane konkretnym zastosowaniom praktycznym i dzięki temu dające Czytelnikowi swobodę w konkretyzowaniu Jego własnych zastosowań. Stosowanie dowolnych układów równań pozwoli też skupić się na istocie omawianych własności.

Autor chciałby serdecznie podziękować Prof. dr. hab. Stanisławowi Janeczko za wykazane przezeń zainteresowanie przedstawianą w tym opracowaniu problematyką oraz zaproszenie do poprowadzenia wykładu specjalnego w ramach oferty dydaktycznej Centrum Studiów Zaawansowanych Politechniki Warszawskiej. Słowa podziękowania należą się też dr. hab. Wojciechowi Domitrzowi za krytyczne uwagi i wskazania natury pojęciowej i terminologicznej, które niewątpliwie przyczyniły się do ulepszenia tekstu tego opracowania.

